Correction du concours blanc de mathématiques

Dans la suite de ce devoir, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite de Fibonacci, définie par :

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \end{cases}$$

Partie A : Préliminaires fibonacciens

Notons $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. $\varphi^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} = \varphi + 1$.
2. Notons $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Montrer par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \leqslant \varphi^n$.
   Initialisation : $f_0 = 0 \leqslant 1 = \varphi^0$ et $f_1 = 1 \leqslant \varphi$.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $f_n \leqslant \varphi^n$ et $f_{n+1} \leqslant \varphi^{n+1}$.
   $$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \leqslant \varphi^n + \varphi^{n+1} = \varphi^n(1+\varphi) = \varphi^n\varphi^2 = \varphi^{n+2}$$
   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \leqslant \varphi^n$.
3. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$ dont les solutions sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. D'où $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f_n = \lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
   À l'aide des conditions initiales, on trouve $\lambda + \mu = 0$ et $\frac{\sqrt{5}}{2}(\lambda - \mu) = 1$. D'où $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.
   Conclusion :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$
4. On a $\frac{\sqrt{5}f_n}{\varphi^n} = 1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ car $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| \leqslant \frac{2}{3} < 1$. Conclusion : $f_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$.

Partie B : Fibonacci, les séries et $\frac{1}{89}$

Soit $q \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(q) = \sum_{k=0}^{n} f_k q^k$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$,
   $$\begin{aligned} S_{n+2}(q) &= \sum_{k=0}^{n+2} f_k q^k = f_0 + f_1 q + \sum_{k=2}^{n+2} f_k q^k \\ &= q + \sum_{i=0}^{n} f_{i+2} q^{i+2} \\ &= q + \sum_{i=0}^{n} f_{i+1} q^{i+2} + \sum_{i=0}^{n} f_i q^{i+2} \\ &= q + \sum_{l=1}^{n+1} f_l q^{l+1} + q^2 S_n(q) \\ &= q + q S_{n+1}(q) + q^2 S_n(q) \end{aligned}$$

6. Supposons que $|q| < \frac{1}{\varphi}$, alors $|f_n q^n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5}}|q\varphi|^n$.

   Or $\sum |q\varphi|^n$ est une série convergente car c'est une série géométrique de raison $|q\varphi| < 1$. Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum |f_n q^n|$ converge d'où $\sum f_n q^n$ converge absolument.

   Notons S la somme de la série $\sum f_n q^n$ i.e. $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n q^n$.

   En passant à la limite dans la relation de la question précédente, on obtient $S = q + qS + q^2 S$ i.e. $(1-q-q^2)S = q$. De plus, $|q+q^2| < \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} = \frac{\varphi+1}{\varphi^2} = 1$, donc $q + q^2 \neq 1$ d'où $1-q-q^2 \neq 0$.

   Conclusion : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n q^n = \dfrac{q}{1-q-q^2}$.

7. On suppose dans cette question que $|q| > \frac{1}{\varphi}$. On a $\frac{f_{n+1}|q|^{n+1}}{f_n|q|^n} = \frac{f_{n+1}}{f_n}|q| \underset{n\to+\infty}{\sim} \varphi|q|$.

   D'où
$$\frac{f_{n+1}|q|^{n+1}}{f_n|q|^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi|q| > 1$$
   Donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in [\![N, +\infty[\![, \frac{f_{n+1}|q|^{n+1}}{f_n|q|^n} > 1$.

   Conclusion : à partir d'un certain rang, la suite $(f_n|q|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

   En particulier, pour tout $n \in [\![N, +\infty[\![$, $|f_n q^n| = f_n|q|^n > f_N|q|^N$.

   Donc le terme général de la série $\sum f_n q^n$ ne tend pas vers 0 i.e. $\sum f_n q^n$ diverge grossièrement.

8. Pour $q = \frac{1}{\varphi}$, $f_n q^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5}}$ et pour $q = -\frac{1}{\varphi}$, $f_n q^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}}$. Le terme général de la série $\sum f_n q^n$ ne peux donc pas tendre vers 0. Conclusion : la série $\sum f_n q^n$ diverge grossièrement.

9. On trouve sur internet l'affirmation suivante :

```
1/89 = 0.0
        + 1
        +  1
        +   2
        +    3
        +     5
        +      8
        +      13
        +       21
        +         etc...  Nombres de Fibonacci
        ---------------------------------------------------
     =  0.0112359550...
```

   La somme explicitée ci-dessus est la somme de la série $\sum \dfrac{f_n}{10^{n+1}} = 10^{-1} \sum f_n \left(10^{-1}\right)^n$.

   Or $|10^{-1}| < \frac{1}{\varphi}$, la série $10^{-1}\sum f_n \left(10^{-1}\right)^n$ est donc convergente. La somme existe bien et vaut
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_n}{10^{n+1}} = 10^{-1}\frac{10^{-1}}{1-10^{-1}-10^{-2}} = \frac{1}{100-10-1} = \frac{1}{89}$$

Partie C : Fibonacci et l'algèbre linéaire

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{100} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$ et le vecteur-colonne $X_n = \begin{pmatrix} \frac{f_n}{10^n} \\ \frac{f_{n+1}}{10^{n+1}} \end{pmatrix}$ où $n \in \mathbb{N}$.

On définit également les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$, où $d_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{20}$ et $d_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{20}$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$, $AX_n = \begin{pmatrix} \frac{f_{n+1}}{10^{n+1}} \\ \frac{f_n}{10^{n+2}} + \frac{f_{n+1}}{10^{n+2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f_{n+1}}{10^{n+1}} \\ \frac{f_{n+2}}{10^{n+2}} \end{pmatrix} = X_{n+1}$.

    Par itération immédiate, $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

11. On a $\det(P) = d_2 - d_1$ donc P est inversible. De plus, $P^{-1} = \frac{1}{d_2-d_1}\begin{pmatrix} d_2 & -1 \\ -d_1 & 1 \end{pmatrix}$.

12. On a :

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= \frac{1}{d_2-d_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_2 & -1 \\ -d_1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{d_2-d_1}\begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_1^2 & d_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_2 & -1 \\ -d_1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{d_2-d_1}\begin{pmatrix} 0 & d_2-d_1 \\ d_1d_2(d_1-d_2) & d_2^2-d_1^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -d_1d_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$.

13. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} X_0 + \cdots + X_n &= (I_2 + \cdots + A^n)X_0 \\ &= P(I_2 + \cdots + D^n)P^{-1}X_0 \\ &= \frac{1}{d_2-d_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\cdots+d_1^n & 0 \\ 0 & 1+\cdots+d_2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_2 & -1 \\ -d_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{d_2-d_1}\begin{pmatrix} \frac{1-d_1^{n+1}}{1-d_1} & \frac{1-d_2^{n+1}}{1-d_2} \\ \star & \star \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10(d_1-d_2)}\begin{pmatrix} \frac{1-d_1^{n+1}}{1-d_1} - \frac{1-d_2^{n+1}}{1-d_2} \\ \star \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où la première composante du vecteur $X_0 + \cdots + X_n$ tend vers

$$\frac{1}{10(d_1-d_2)}\left(\frac{1}{1-d_1} - \frac{1}{1-d_2}\right) = \frac{1}{10(1-d_1)(1-d_2)} = \frac{1}{10(1-\frac{1}{10}-\frac{4}{400})} = \frac{10}{89}$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}$. La première composante du vecteur $X_0 + \cdots + X_n$ est égal à $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{10^k}$.

On retrouve le fait que la série $\sum \frac{f_n}{10^{n+1}}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_n}{10^{n+1}} = \frac{1}{89}$.

Partie D : Fibonacci et les polynômes

On définit les *polynômes de Fibonacci* de la manière suivante : $\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = XF_{n+1} + F_n \qquad (\star) \end{cases}$

15. $F_2 = X$, $F_3 = X^2 + 1$ et $F_4 = X^3 + 2X$.

16. Montrons par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(F_n) = n - 1$ et 1 est le coefficient dominant de F_n.
Initialisation : $F_1 = 1$ et $F_2 = X$ donc la propriété est vraie pour $n \in \{1, 2\}$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\deg(F_n) = n - 1$, $\deg(F_{n+1}) = n$ et que F_n et F_{n+1} sont de coefficient dominant 1. Donc $\deg(XF_{n+1}) = \deg(X) + \deg(F_{n+1}) = n+1 > \deg(F_n)$. Par conséquent, On a $\deg(F_{n+2}) = \deg(XF_{n+1} + F_n) = \deg(XF_{n+1}) = n + 1$ et le coefficient dominant de F_{n+2} est le même que celui de XF_{n+1}, il est donc égal à 1.
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(F_n) = n - 1$ et 1 est le coefficient dominant de F_n.

17. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n = F_n(1)$ et $v_n = F_n(0)$. En évaluant l'égalité $(\star)$ en 1 et en 0, on obtient :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = v_n \end{cases}$$

Par conséquent, $F_n(1) = u_n = f_n$ et $F_n(0) = v_n = \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^n\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

18. Soit $t \in]0, \pi[$ et $x = 2\mathbf{i}\cos(t)$.
La suite $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique

$$(E_c) : r^2 - xr - 1 = 0\,.$$

Cette équation admet pour discriminant $x^2 + 4$ (ce discriminant est un réel strictement positif).
Par conséquent (E_c) admet deux racines complexes distinctes : $\alpha(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ et $\beta(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$.
D'où $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n(x) = \lambda\alpha(x)^n + \mu\beta(x)^n$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
À l'aide des conditions initiales, $\lambda + \mu = 0$ et $\lambda\alpha(x) + \mu\beta(x) = 1$.
D'où $\lambda = \dfrac{1}{\alpha(x) - \beta(x)}$ et $\mu = -\dfrac{1}{\alpha(x) - \beta(x)}$.
Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n(x) = \dfrac{\alpha(x)^n - \beta(x)^n}{\alpha(x) - \beta(x)}$.

19. Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$, on pose $z_k = \frac{\mathbf{i}k\pi}{n}$ et $x_k = 2\mathbf{i}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

   (a) On a $\alpha(x_k) = \frac{2\mathbf{i}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \sqrt{-4\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)+4}}{2} = \mathbf{i}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \mathbf{i}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
   Par ailleurs $\mathbf{i}e^{-z_k} = \mathbf{i}\left(\cos\left(-\frac{k\pi}{n}\right) + \mathbf{i}\sin\left(-\frac{k\pi}{n}\right)\right) = \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \mathbf{i}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. D'où $\alpha(x_k) = \mathbf{i}e^{-z_k}$.
   On remarque que $\overline{\beta(x_k)} = -\alpha(x_k)$, d'où $\beta(x_k) = \overline{-\mathbf{i}e^{-z_k}} = \overline{-\mathbf{i}}\,\overline{e^{-z_k}} = \mathbf{i}e^{z_k}$.
   $F_n(x_k) = \dfrac{\mathbf{i}^n e^{-nz_k} - \mathbf{i}^n e^{nz_k}}{\mathbf{i}e^{-z_k} - \mathbf{i}e^{z_k}} = \dfrac{\mathbf{i}^n e^{-\mathbf{i}k\pi} - \mathbf{i}^n e^{\mathbf{i}k\pi}}{\mathbf{i}e^{-z_k} - \mathbf{i}e^{z_k}} = \dfrac{-2\mathbf{i}^n\sin(k\pi)}{e^{-z_k} - e^{z_k}} = 0$.

   (b) On a trouvé $n-1$ racines distinctes du polynôme F_n qui sont $x_1, \ldots, x_{n-1}$.
   Or F_n est de degré $n-1$ et de coefficient dominant 1.
   Par conséquent, $F_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(X - x_k) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(X - 2\mathbf{i}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$.

   (c) On suppose de plus que n est pair.
   On a $x_{n-k} = 2\mathbf{i}\cos\left(\frac{(n-k)\pi}{n}\right) = 2\mathbf{i}\cos\left(\pi - \frac{k\pi}{n}\right) = -2\mathbf{i}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \overline{x_k}$.
   De plus, pour $k = \frac{n}{2}$, $x_k = 0$. En découpant le produit, on obtient

$$\begin{aligned} F_n &= (X - 0)\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}(X - x_k)\prod_{k=\frac{n}{2}+1}^{n}(X - x_k) \\ &= X\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}(X - x_k)(X - \overline{x_k}) \\ &= X\prod_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\left(X^2 + 4\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

   (d) Supposons que n est impair.
   $F_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(X - x_k)\prod_{k=\frac{n+1}{2}}^{n}(X - x_k) = \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(X - x_k)(X - \overline{x_k}) = \prod_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\left(X^2 + 4\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$

   (e) En évaluant en 1, on obtient $f_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\left(1 + 4\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$ dans les cas pairs et impairs.

20. Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$ et $k \in [\![0,n-1]\!]$. Notons $F(n,k)$ le coefficient associé à X^k dans F_n.

   (a) Pour tout $n \in [\![2,+\infty[\![$, notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété suivante : « Pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, $F(n,k)$ est le nombre de façons d'écrire $n-1$ comme une somme ordonnée de 1 et de 2, avec exactement k apparitions de 1 ». Montrons par récurrence double que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![2,+\infty[\![$.
   Initialisation : $F_2 = X$ d'où $F(2,0) = 0$ et $F(2,1) = 1$. On a bien :
   - aucune façon d'écrire 1 avec aucune apparition de 1 ;
   - une façon d'écrire 1 avec exactement une apparition de 1.

   $F_3 = X^2 + 1$ d'où $F(3,0) = 1$, $F(3,1) = 0$ et $F(3,2) = 1$. On a bien :
   - une façon d'écrire 2 avec aucune apparition de 1 ;
   - aucune façon d'écrire 2 avec exactement une apparition de 1 ;
   - une façon d'écrire 2 avec exactement 2 apparitions de 1.

   D'où $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour $n \in \{1,2\}$.
   Hérédité : Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$. On a $F_{n+2} = XF_{n+1} + F_n$ i.e.
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} F(n+2,k)X^k &= \sum_{k=0}^{n} F(n+1,k)X^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} F(n,k)X^k \\ &= F(n,0) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(F(n+1,k-1) + F(n,k)\right) X^k \\ &\quad + F(n+1,n-1)X^n + F(n+1,n)X^{n+1}\end{aligned}$$
   - $F(n+2,0) = F(n,0)$. De plus, il y a autant de façon d'écrire $n-1$ et $n+1$ avec aucune apparition de 1 (une si n pair et 0 si n impair d'ailleurs).
   - Pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, $F(n+2,k) = F(n+1,k-1) + F(n,k)$. De plus, il y a deux types de décomposition de $n+1$ avec k apparitions de 1, celles qui finissent par 1 et celles qui finissent par 2. Celles du premier type sont au nombre de $F(n+1,k-1)$ et celles du second sont au nombre de $F(n,k)$ d'après l'hypothèse de récurrence.
   - $F(n+2,n) = F(n+1,n-1)$. De plus, il y a autant de façons d'écrire $n+1$ avec n apparitions de 1 que de façons d'écrire n avec $n-1$ apparitions de 1 (aucune d'ailleurs).
   - $F(n+2,n+1) = F(n+1,n)$. De plus, il y a autant de façons d'écrire $n+1$ avec $n+1$ apparitions de 1 que de façons d'écrire n avec n apparitions de 1 (une d'ailleurs).

   Par conséquent, $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
   Conclusion : Pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, $F(n,k)$ est le nombre de façons d'écrire $n-1$ comme une somme ordonnée de 1 et de 2, avec exactement k apparitions de 1.
   Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$ et $k \in [\![0,n-1]\!]$.
   Si n et k ont la même parité, il n'y aucune façon d'écrire $n-1$ avec k apparitions de 1.
   Si n et k n'ont pas la même parité, il y a $\binom{\frac{n+k-1}{2}}{k}$ façons d'écrire $n-1$ avec k apparitions de 1.
   En effet, de telles décompositions comportent k fois le nombre 1 et $\frac{n-1-k}{2}$ fois le nombre 2.
   Il y a $\binom{k+\frac{n-k-1}{2}}{k} = \binom{\frac{n+k-1}{2}}{k}$ façons de disposer les nombres 1 dans de telles décompositions.

   (b) On a $f_n = F_n(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} F(n,k) = \sum_{\substack{k=0 \\ k+n \text{ impair}}}^{n-1} \binom{\frac{n+k-1}{2}}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{\frac{n+k-1}{2}}{k}$. On sous entend dans le dernier terme que les coefficients binomiaux comportant des nombres non entiers valent 0.

21. Pour $n = 2$: $f_2 = 1$; $\displaystyle\prod_{k=1}^{0} \left(1 + 4\cos^2\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right) = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{\frac{1+k}{2}}{k} = 1$.
   Pour $n = 3$: $f_3 = 2$; $\displaystyle\prod_{k=1}^{1} \left(1 + 4\cos^2\left(\frac{k\pi}{3}\right)\right) = 1 + 4\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} \binom{\frac{2+k}{2}}{k} = \binom{2}{0} + \binom{2}{2} = 2$.
   Pour $n = 4$: $f_4 = 3$; $\displaystyle\prod_{k=1}^{1} \left(1 + 4\cos^2\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right) = 1 + 4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} \binom{\frac{3+k}{2}}{k} = \binom{2}{1} + \binom{3}{3} = 3$.